Velocidad de Rotación en Galaxias Espirales
Análisis Dinámico Clásico, Relativista y la materia Oscura
(MSc. Yul Goncalves, yulaldebran9@gmail.com)

Presento a continuación un análisis de la velocidad de la estrella "m" que se encuentre a una distancia "r" del centro de una galaxia espiral, según se ilustra en la fig.1.

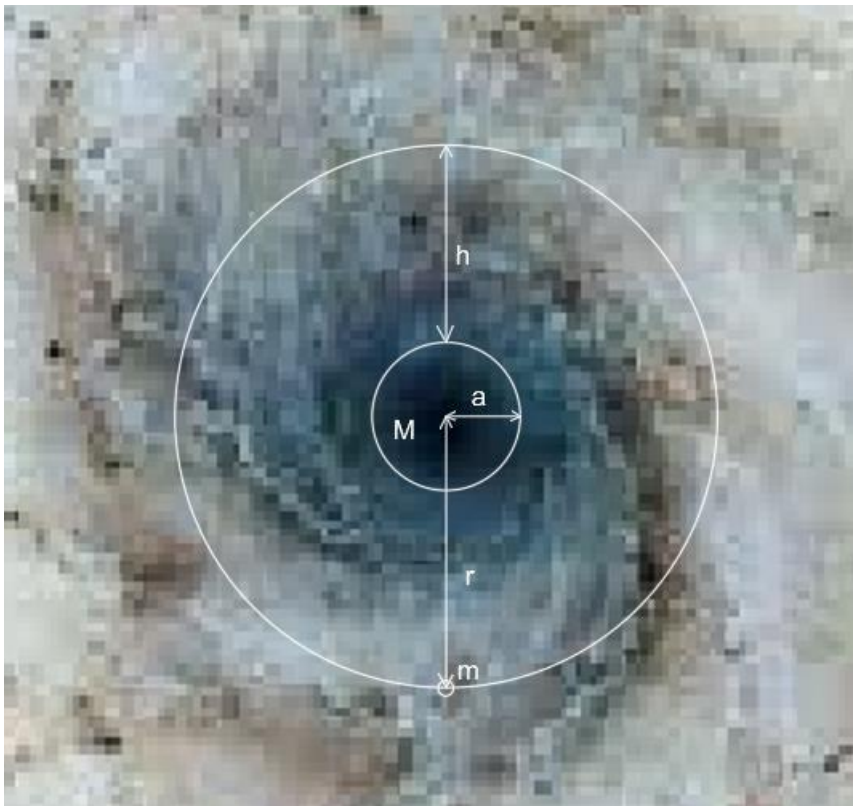

fig.1. Estrella *m* rotando a una distancia *r* del centro de una Galaxia Espiral.

Análisis Clásico:

a. Como es habitual se considera que dentro del radio "a" se encuentra la Masa "M" principal de la galaxia y según observaciones se toma una densidad constante $\rho = \rho_c$ con lo que el patrón de la velocidad es el siguiente:

$$v(r) = V_a.\left(\frac{r}{a}\right) \quad \text{con } r \in [0,\ a] \quad \text{ec.1}$$

Siendo $V_a = \sqrt{\frac{GM}{a}}$, *se tiene que* $v(r) = \left(\sqrt{\frac{GM}{a}}\right).\left(\frac{r}{a}\right)$ con $r \in [0,\ a]$ ec.2

Vemos que V_a es la velocidad alcanzada en la periferia del radio $r = a$.

Como la densidad ρ dentro del círculo $r = a$ se considera constante $\rho = \rho_c$, entonces la masa aumenta con el cubo del radio, así:

$$M(r) = \left(\frac{4\pi}{3}\rho_c\right) r^3 \text{ con } r \in [0,\ a] \quad \text{ec.3}$$

$$M(r = a) = \left(\frac{4\pi}{3}\rho_c\right) a^3 = M \quad \text{ec.4}$$

Para simplificar llamaremos $M(a) = M$ ec.5

b. Continuando con $r \geq a$ como es habitual y la observación directa indica, se puede considerar A partir de aquí que la Masa deja de aumentar, o permanece constante y la densidad ρ decae con el cubo del radio.

$$\rho(r) = \frac{M(a)}{\left(\frac{4\pi}{3}\right)r^3} = \frac{M}{\left(\frac{4\pi}{3}\right)r^3} \quad \text{para} \quad r \in [a, \infty] \quad \text{ec.6}$$

Aplicando física clásica vemos que:

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad \text{ec.7}$$

Desarrollando notamos que:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{GM}{r^2} \quad \text{como} \quad v = \frac{dr}{dt} \quad \text{despejando} \quad dt = \frac{dr}{v}$$

Y que podemos sustituir, quedándonos:

$$\frac{dv}{\frac{dr}{v}} = \frac{GM}{r^2}$$ reordenado nos queda la siguiente ecuación diferencial:

$$v.dv = \frac{GM}{r^2}dr \quad \text{ec.8}$$

Resolviéndola y **aquí está lo importante vemos que**:

$$\int v.dv = \int \frac{GM}{r^2}dr \quad => \quad \frac{v^2}{2} + k1 = -\frac{GM}{r} + k2$$

Despejando la velocidad notamos que:

$$v(r) = v = \sqrt{k - \frac{2GM}{r}} \quad \text{ec.9}$$

Para deducir el valor de la constante k, sabemos que cuando el radio $r = a,$ debe cumplirse que:

$$v(r = a) = V_a \quad => \quad \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{k - \frac{2GM}{a}}$$

Con lo cual nos da:

$$k = \frac{3GM}{a}$$

De allí que finalmente resulte:

$$v(r) = \left(\sqrt{\frac{GM}{a}}\right).\left(\frac{r}{a}\right) \quad \text{con } r \in [0,\ a] \quad \text{ec.2}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{3GM}{a} - \frac{2GM}{r}} \quad \text{para } r \geq a \quad \text{ec.10}$$

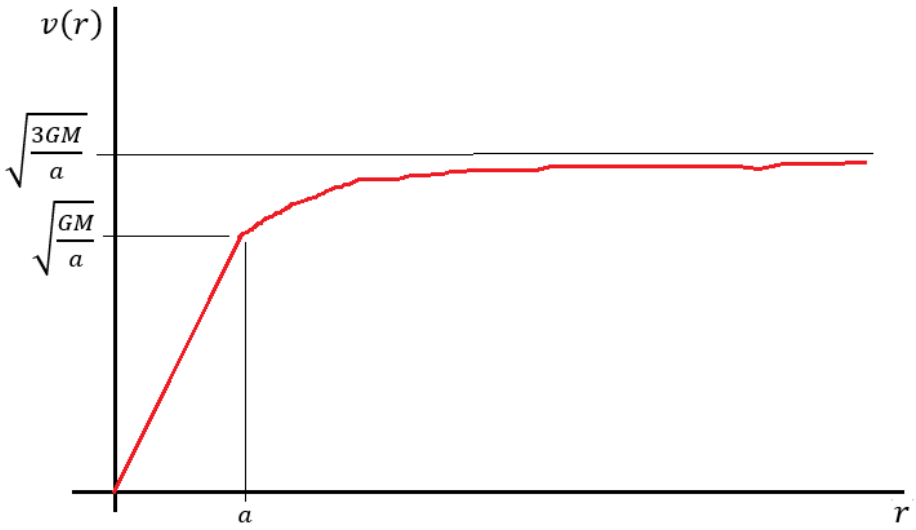

Fig. 2. Y como vemos inevitablemente resulta que el patrón de velocidad tiende a un valor constante sin invocar la existencia de "materia oscura" y sin invocar una modificación de la dinámica newtoniana MOND.

Análisis Relativístico:

a. Para con $r \in [0,\ a]$ *queda igual que el clásico*:

$$v(r) = \left(\sqrt{\frac{GM}{a}}\right).\left(\frac{r}{a}\right) \text{ con } r \in [0,\ a] \quad \text{ec.2}$$

b. Para $r \geq a$ Aplicando física relativista vemos que:

$$g = \frac{F}{m} - \frac{F.v^2}{m.c^2} \quad \text{ec.11}$$

Desarrollando:

$$g = \frac{F}{m}(1 - (v/c)^2)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{GMm}{mr^2}(1 - (v/c)^2)$$

Con lo que:

$\frac{dv}{dt} = \frac{GM}{r^2}(1 - (v/c)^2)$ ya que $v = \frac{dr}{dt}$ despejando $dt = \frac{dr}{v}$

Y sustituyendo resulta en:

$$\frac{\frac{dv}{dr}}{v} = \frac{GM}{r^2}(1 - (v/c)^2)$$

Reordenado para poder resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{v.dv}{(1-(v/c)^2)} = \frac{GM}{r^2}dr \quad \text{ec. 12}$$

Si integramos ambas partes resulta:

$$\int \frac{c^2 v.dv}{(c^2 - v^2)} = \int \frac{GM}{r^2}dr$$

$$-\frac{c^2}{2}\ln(c^2 - v^2) + k1 = -\frac{GM}{r} + k2$$

$$c^2 - v^2 = e^{\frac{2GM}{c^2 r} - (k2 - k1)\frac{2}{c^2}}$$ despejando

$$v^2 = c^2 - e^{\frac{2GM}{c^2 r} - (k2 - k1)\frac{2}{c^2}}$$ que de manera general resulta

$$v^2 = c^2 - e^{\frac{2GM}{c^2 r} + k}$$

Para deducir el valor de la constante k, sabemos que cuando el radio $r = a$, debe cumplirse que:

$$v(r = a) = V_a\,, \quad => \quad {V_a}^2 = \frac{GM}{a}$$

Con lo que:

$${V_a}^2 = c^2 - e^{\frac{2GM}{c^2 a} + k}$$ despejando k resulta:

$$k = \ln\left(c^2 - {V_a}^2\right) - \frac{2GM}{c^2 a}$$

Con lo cual nos va quedando:

$$v^2 = c^2 - e^{\frac{2GM}{c^2 r} + \ln\left(c^2 - {V_a}^2\right) + \frac{2GM}{c^2 a}}$$ ec.13

Y que si reacomodamos la podemos presentar de la siguiente forma:

$$v(r) = \sqrt{c^2 - [c^2 - {V_a}^2].\, e^{\frac{2GM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}} \quad \text{para} \quad r \geq a \qquad \text{ec.14}$$

$$v(r) = \left(\sqrt{V_a}\right).\left(\frac{r}{a}\right) \quad \text{con} \quad r \in [0,\, a] \qquad \text{ec.2}$$

Siendo $V_a = \sqrt{\frac{GM}{a}}$

Se puede demostrar usando una hoja de cálculo como Excel que en la ec.14, si hacemos que el radio tienda al infinito $r \to \infty$

Coincide el valor relativístico con el clásico:

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{c^2 - [c^2 - {V_a}^2].\, e^{\frac{2GM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}} = \sqrt{\frac{3GM}{a}}$$

Es decir, que el comportamiento del relativístico es semejante al clásico, la ventaja del relativístico es que se evita que se alcance o sobre pase la velocidad de la luz "c".

A continuación, se tomaron unos datos estimados de una galaxia genérica para ver las gráficas en Excel:

C	3,00E+05	km/s
GM	30000	(km/s)^2.kpc
a	1	kpc
GM/a	30000	
Va	173,2050808	km/s

r(kpc)	v(r) relativ	v(r) clásico
0	0	0
0,1	17,32050808	17,3205081
0,2	34,64101615	34,6410162
0,3	51,96152423	51,9615242
0,4	69,2820323	69,2820323
0,5	86,60254038	86,6025404
0,6	103,9230485	103,923048
0,7	121,2435565	121,243557
0,8	138,5640646	138,564065
0,9	155,8845727	155,884573
1	173,2050808	173,205081
1,1	188,2937691	188,293774
1,2	199,9999903	200
1,3	209,3947186	209,394732
1,4	217,1240424	217,124059
1,5	223,6067779	223,606798
1,6	229,1287622	229,128785
1,7	233,8928616	233,892886
1,8	238,0475873	238,047614
5	279,2847493	279,284801
10	289,8274759	289,827535
15	293,2575044	293,257566
20	294,9575613	294,957624
25	295,9729082	295,972972

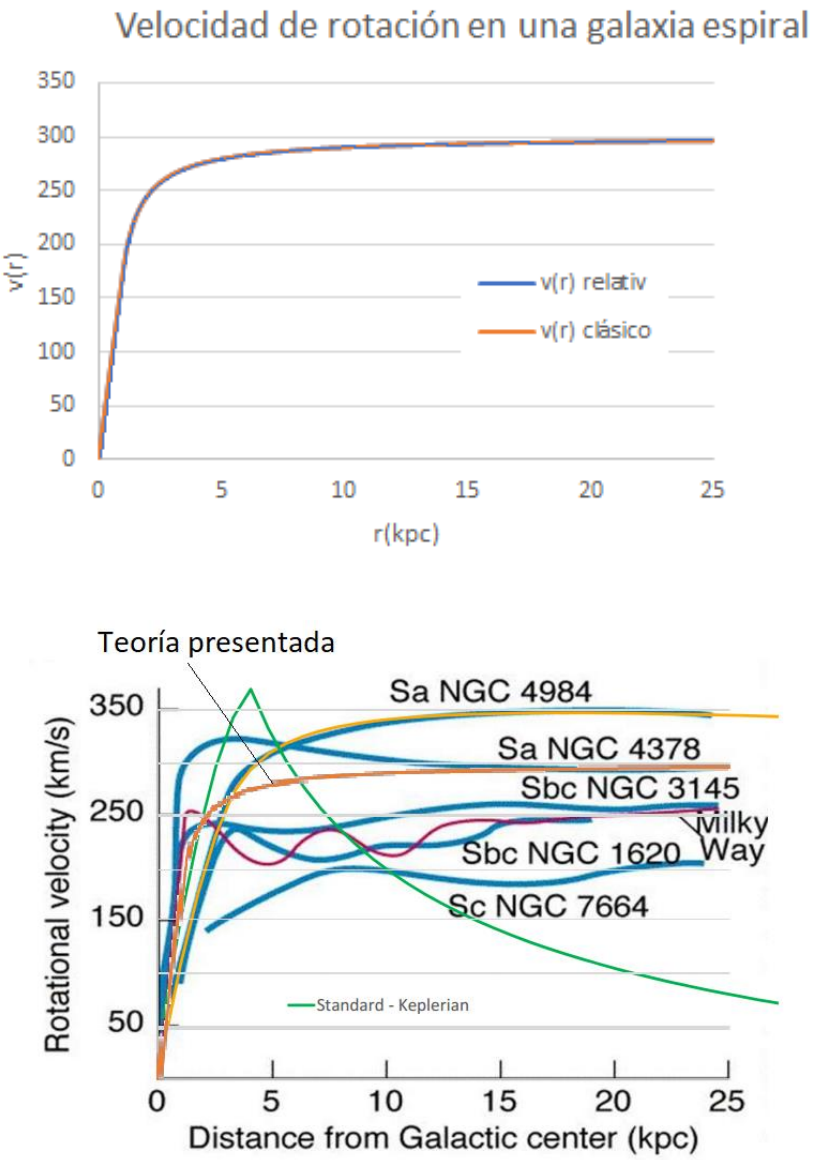

Fig.3 Comportamiento teórico y comparativos con algunas galaxias reales.

El comportamiento de la ecuación ec.10 clásica y la ec.14 relativística se superponen prácticamente, y se aplanan al aumentar el radio como la evidencia observacional indica. Las oscilaciones o formas caprichosas alrededor del valor constante o no kepleriano puede deberse a las interacciones de las estrellas entre sí en esas zonas. Lo interesante es que no hace falta invocar la existencia de “materia oscura”, ni invocar una modificación de la dinámica newtoniana MOND.