¿Los números complejos existen?

Supongamos que si existen.

Cualquier número complejo de la forma $(a + bi)$ puede ser escrito como: $a + bi = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

Dónde ρ es un real positivo que representa el módulo del número complejo y φ un real que representa el argumento, en otras palabras:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \varphi = \arctan(b/a) \quad (\text{si } a > 0) \quad \text{ó} \quad \varphi = \arctan(b/a \pm \pi) \quad (\text{si } a < 0)$$

Aplicando ahora la fórmula de Euler ($e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$) resulta que: $a + bi = \rho e^{i\varphi}$

Ahora bien, siempre es posible encontrar δ tal que $\varphi = 2\pi\delta$, por ende: $a + bi = \rho e^{i2\pi\delta}$,

o lo que es lo mismo: $a + bi = \rho (e^{i2\pi})^\delta$

Pero sabemos que: $e^{i2\pi} = 1$, entonces: $a + bi = \rho 1^\delta$

Considerando que: $1^\delta = 1$ resulta que: $a + bi = \rho$

Hemos demostrado entonces que: $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}$

Es decir, todo número complejo es igual a su módulo. *Por lo que es evidente que los complejos no existen.*

Sin embargo hay un error en el desarrollo, se ha supuesto que $1^\delta = 1$, pero esto no es del todo cierto. En efecto, si δ es racional ($\delta = m/n$ con m y n números enteros), habría que tomar en cuenta las raíces de la unidad. Es decir, hay n diferentes raíces n -ésimas de la unidad: $e^{i2\pi k/n}$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$

Ahora bien, pero ¿qué sucede si δ es irracional? En otras palabras, ¿qué ocurre si no existen m y n enteros tal que δ sea igual a m/n ?

En el caso de δ irracional sería entonces $1^\delta = 1$ y, dado que el conjunto de los números irracionales es también denso e infinito, esto significaría que una cantidad infinita de números complejos no existen (lo cual va en contra del supuesto inicial).

¿dónde está el error?