

Mediciones de ángulos aparentes desde una CCD

Miguel Arizu y Fernando Mazzone

“ Cuando puedes medir de lo que estas hablando y lo expresas en números, sabes algo sobre eso; pero cuando no puedes medirlo, cuando no puedes expresarlo en números, tu conocimiento es pobre y no satisfactorio: puede ser el comienzo del conocimiento, pero haz apenas comenzado en el pensamiento científico ”

William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907)

1. Propósitos

El objetivo de este escrito es introducir métodos, y someterlos a la crítica y uso por parte de los foristas, para determinar los ángulos aparentes entre objetos en el cielo o terrestres a partir de mediciones efectuadas sobre fotografías tomadas con cámara digital. El conocimiento de esta técnica nos permitirá entre otras cosas:

1. Calcular el *campo de visión* de nuestra cámara (FOV) en una determinada distancia focal. Lo que puede ser útil al momento de decidir con que distancia focal efectuaremos nuestras fotografías.
2. Cuantificar el movimiento de un objeto sobre el fondo de estrellas.
3. 3. Calcular la distancia angular entre 2 objetos.
4. Calcular por el método del *paralaje*, usado desde la antigüedad por Hiparco y Aristarco en Grecia, la distancia entre nosotros y un objeto celeste cercano, o a objetos terrestres.

Nos gustaría que sobre estos puntos se charle en el futuro.

2. ¿A que llamamos ángulo aparente?

Es el ángulo que forman dos puntos cualesquiera y un observador. La figura 1 muestra el ángulo al que nos referimos, en la misma un observador en el punto A quiere determinar la separación angular entre dos personajes, conocidos por todos, en los puntos B y C. El ángulo que el observador quiere conocer es el ángulo $\widehat{BAC}$. Vamos a explicar algunos métodos que hemos averiguado para ayudarlo en esta difícil misión.

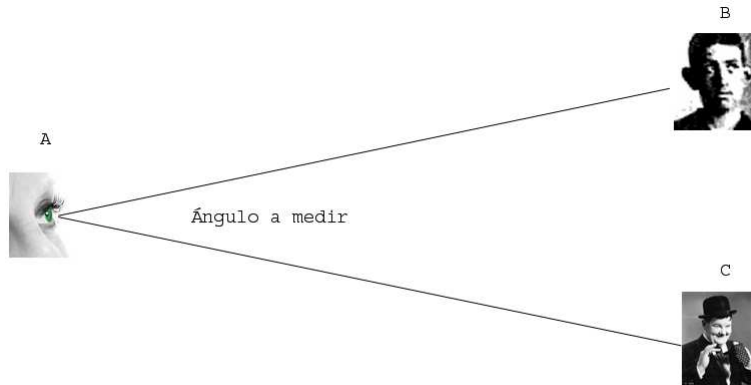


Figura 1: Ángulo Aparente

La medición de este ángulo utilizando una cámara digital implica conocer la dimensión física de un pixel del sensor CCD.

3. Dimensión del pixel, su determinación

Como todos Uds saben un sensor CCD es una matriz de micro sensores, cada uno de ellos llamado pixel. Lo que necesitamos conocer son las dimensiones de cada uno de estos pixels. Normalmente parece ser que estos pixels no son cuadrados sino que son rectangulares, mientras que en los CMOS si son cuadrados. . No obstante la diferencia con un cuadrado es muy pequeña y de ahora en más, en aras de la simplicidad, los supondremos cuadrados. Hemos buscado en la web métodos para determinar la longitud de estos pixels, y el método que encontramos es el descrito en segundo lugar. No obstante también sugerimos la consideración del primer método, que es más natural y desconocemos la causa de que no se haya usado, por ejemplo en [1]. Por supuesto que si por algún motivo se conoce las dimensiones del pixel el paso de determinar su longitud es innecesario.

Antes de continuar quisiéramos aclarar que la longitud del pixel no se puede calcular sobre la fotografía ya que una fotografía es una versión ampliada de lo

que el CCD leyó.

Como, para cualquiera de los métodos necesitamos medir distancias sobre fotografías, describiremos, en primer lugar, esta herramienta del photoshop.

3.1. Midiendo distancias con Photoshop

La herramienta de medición de distancias se localiza en la barra de herramientas como muestra la figura 2. Su uso es completamente intuitivo, se pincha con el botón izquierdo del ratón en un punto y se arrastra, manteniendo apretado el botón, hasta soltarlo en el punto del que queremos averiguar su distancia al primero. El valor de esta distancia se lee en la ventana Info del Photoshop. En el caso de la figura 2 medimos el diámetro aparente de la luna, dando como resultado 1092.47 pixels. Notar que en la ventana Info podemos cambiar la unidad de medición, no obstante sólo usaremos pixels como unidad de medición, la razón es muy sencilla: 10 pixels en la foto representan 10 pixels en el sensor y esto no se mantiene obviamente con otras unidades de medida.

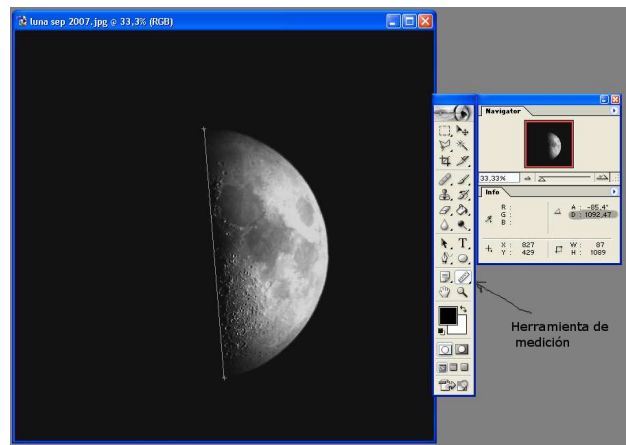


Figura 2: Diámetro en pixels de la luna

3.2. Primer Método

Si conociéramos la dimensión del CCD y cuantos pixels contiene, una simple cuenta nos daría el tamaño de un píxel.

Para averiguar las dimensiones del CCD recurrimos a la página <http://www.dpreview.com>, donde hay una bastante completa información sobre muchos modelos de cámaras. Por ejemplo, tomemos el caso de la Kodak z710. En la página de especificaciones (ver figura 3) vemos que el sensor tiene 3072 x 2304 pixels.

Kodak Z710	
Image	
More information	Announced 25-Sep-06 All Kodak products
Discussion	Kodak Talk Forum Find related discussion
Owners opinions	★★★★★ Read owners opinions (12) Post / Edit your opinion
Support this site by purchasing from our affiliate merchants	Click here to check price / order now
Format	SLR-like
Price (street)	
Also known as	
Release Status	
Max resolution	3072 x 2304
Low resolution	2592 x 1944, 2048 x 1536, 1600 x 1200
Image ratio w/h	4:3, 3:2
Effective pixels	7.1 million
Sensor photo detectors	7.4 million
Sensor size	1/2.5"
Sensor type	CCD
Colour filter array	GrB
Sensor manufacturer	Unknown

Figura 3: Especificaciones Kodak z710

Por otro lado la dimensión del sensor es de 1/2,5", este no es el dato que necesitamos, es una convención sobre longitudes de sensores que no es la medida que buscamos, pero pinchando en el signo de pregunta podemos averiguar más sobre esta convención y en particular averiguar la longitud del sensor de 1/2,5", esto lo hacemos en la tabla de la figura 4 donde se muestran los tamaños de sensores más comunes: así vemos que el tamaño de un sensor de 1/2,5" es de $5,760 \times 4,290$ milímetros.

Common Image Sensor Sizes					
In the table below, "Type" refers to the commonly used type designation for sensors. "Aspect Ratio" refers to the ratio of width to height. "Dia." refers to the diameter of the tube size (this is simply the type converted to millimeters). "Diagonal / Width / Height" are the dimensions of the sensors image producing area.					
Type	Aspect Ratio	Dia. (mm)	Sensor (mm)		
			Diagonal	Width	Height
1/3.6"	4:3	7.056	5.000	4.000	3.000
1/3.2"	4:3	7.938	5.680	4.536	3.416
1/3"	4:3	8.467	6.000	4.800	3.600
1/2.7"	4:3	9.407	6.721	5.371	4.035
1/2.5"	4:3	10.170	7.168	5.760	4.290
1/2"	4:3	12.700	8.000	6.400	4.800
1/1.8"	4:3	14.111	8.933	7.176	5.319
1/1.7"	4:3	14.941	9.500	7.600	5.700
2/3"	4:3	16.933	11.000	8.800	6.600
1"	4:3	25.400	16.000	12.800	9.600
4/3"	4:3	33.867	22.500	18.000	13.500
1.8" (*)	3:2	45.720	28.400	23.700	15.700
35 mm film	3:2	n/a	43.300	36.000	24.000

Figura 4: Tamaños de sensores más comunes

Así que si dividimos la longitud del sensor por la cantidad de pixels que entran, nos daría el tamaño de uno solo.

$$\text{longitud horizontal del pixel} = \frac{5,760mm}{3072} = 1,875 \times 10^{-3}mm = 1,875\mu m.$$

Donde μm denota micrón y equivale a la milésima parte de un milímetro. En este punto uno se sorprende del ingenio humano que logró crear un dispositivo tan pequeño.

En tanto que

$$\text{longitud vertical del pixel} = \frac{4,290mm}{2304} = 1,861 \times 10^{-3}mm = 1,861\mu m.$$

Como vemos nos dieron dos resultados diferentes, aunque próximos. Podemos adoptar el promedio de los dos como longitud del pixel, esto no es correcto pero simplifica los cálculos posteriores.

$$\text{longitud del pixel} = \frac{1,875\mu m + 1,861\mu m}{2} = 1,868\mu m.$$

3.3. Segundo método, semejanza de triángulos ¡ufa!

3.3.1. Descripción del método

El segundo método, que es el que encontramos en [1], tiene la ventaja que no entraña conocer las dimensiones del sensor, hay que hacer un pequeño y divertido experimento y utilizar un poco de semejanza de triángulos (que ya no es tan divertido). El experimento consiste en situar una regla apoyada en una pared (puede ser un metro de carpintero o una cinta métrica) a una distancia considerable y tomarle fotografías con distintas distancias focales (zoom), ¡Cuidado! el zoom tiene que ser óptico el zoom digital no sirve para esto. En la figura 5 podemos ver un esquema simplificado de lo que sucede.

La distancia a la que situamos la regla de la cámara debe ser lo más lejos posible pero cuidando que la escala graduada se pueda distinguir en la foto. Tratemos que el comienzo (o lo que usemos como “0”) este lo más centrado posible en la foto.

La distancia que separa máquina de la regla la llamaremos d y habría que medirla lo más precisamente posible. Como dijimos, procedemos a tomar varias fotografías de la regla para distintos valores de distancia focal (si su cámara no tiene zoom óptico no se preocupe tome sólo una fotografía).

Listo el tema fotos! Ahora nos vamos con nuestras fotos al photoshop y elegimos alguna distancia en la regla que esté en el campo de visión de todas las fotos, a esta distancia la llamaremos r . Como ejemplo mostramos el experimento en un caso concreto. Se situó la regla a 4,67m de la cámara, es decir a $d = 4670mm$, y se midieron 20cm, es decir $r = 200mm$. En la figura 6 vemos los resultados a los que arribamos.

En el explorador de archivos (file browser ver figura 6) del photoshop buscamos las fotos tomadas y leemos la distancia focal exacta a la que llamaremos

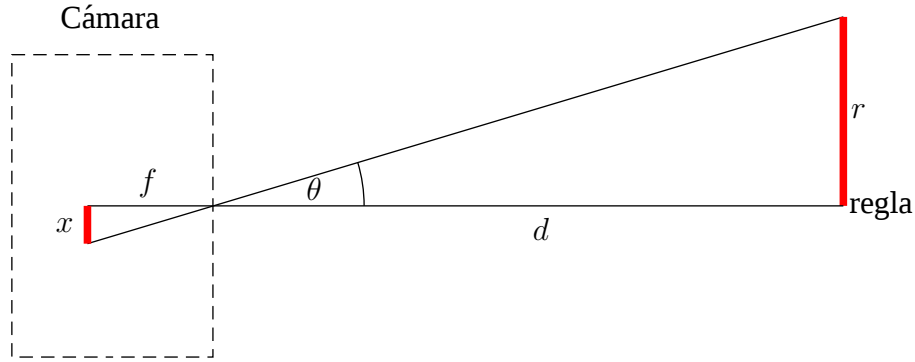


Figura 5: Experimento fotográfico

f . Este dato debería estar en el encabezado de la foto y debería ser leído por photoshop, al menos eso ocurre con varias marcas de cámaras como las Sony, Canon y Kodak, desconocemos si todas las cámaras lo harán, sin este dato no podemos continuar. Por otro lado medimos, como vimos en la sección 3.1, en pixels (¡ojo! no usar otra unidad de medida) la longitud que ocupa la distancia r en la foto a este valor lo llamamos n . Llevamos todas las distancias que obtuvimos a mm (milímetros).

Luego la longitud del pixel, que llamamos s , viene dado por la fórmula:

$$s = \frac{r \times f}{n \times d}.$$

Como hemos tomado diversas fotos con distintas focales podemos disponer los distintos datos como en el cuadro 1, recuerden que r y d están fijos. Nosotros hicimos la tabla para fotos tomadas con la Kodak z710. Los valores de s que obtendrán serán aproximadamente iguales a los del primer método pero no los mismos, adoptemos como valor de s el promedio de los valores encontrados

La diferencia con el primer método es de $0,042\mu m$ que puede parecer poco pero representa el 2 % de la longitud estimada del pixel.

Este valor del tamaño del sensor que hemos obtenido, no varía (para la misma cámara) y conocerlo nos va a permitir poder calcular otras cosas interesantes.

Hicimos esta misma experiencia con la Canon Rebel 350D que tiene un sensor CMOS y no CCD, y obtuvimos los siguientes resultados Tamaño del sensor por "método intuitivo" $s = 6,38 \times 10^{-3}mm$ Tamaño del sensor por "método de semejanzas" $s = 6,42 \times 10^{-3}mm$.

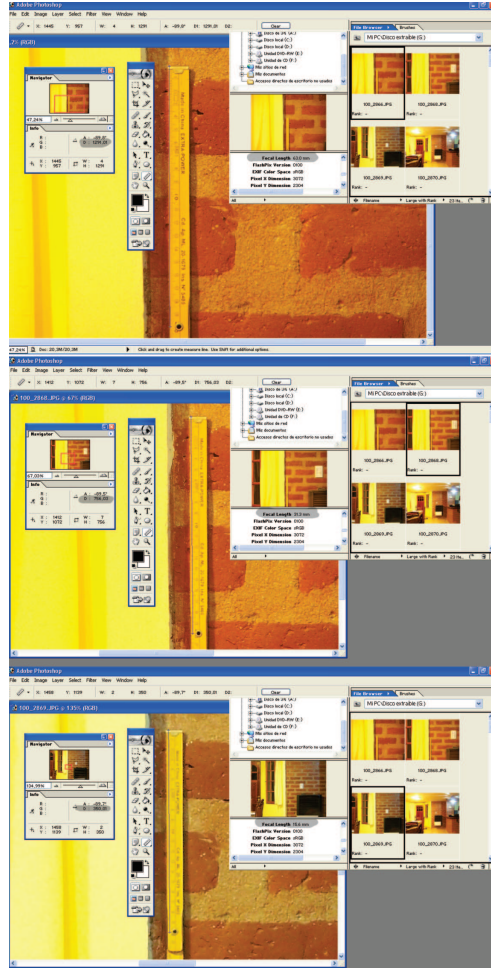


Figura 6: Fotos experimento

Es interesante notar la diferencia de tamaño de píxel entre el CCD de la Kodak y el CMOS de la Canon, sabido es que los pixeles más grandes tienen un mejor rendimiento cuántico, (la capacidad de convertir fotones en electrones).

3.3.2. Justificación del método

Conocer el porqué de la fórmula para s se necesita un poco de matemática, en particular semejanza de triángulos. A los que no le interese pueden saltar esta explicación.

La situación geoméricamente es la presentada en la figura 7. Por f indicamos la longitud focal de la cámara y x es la longitud de la regla elegida para el experimento proyectada sobre el sensor. Entonces los dos triángulos que se forman son

Kodak Z710					
	f	n	d	r	s
Foto 1	63mm	1291.01mm	4670mm	200mm	$2,08 \times 10^{-3}mm$
Foto 2	31.3mm	756.03mm	4670mm	200mm	$1,77 \times 10^{-3}mm$
Foto 3	15.6mm	350.01	4670mm	200mm	$1,9 \times 10^{-3}mm$
media					$1,9110^{-3}mm$

Cuadro 1: Tabla de resultados

semejantes, es decir uno es un zoom, o cambio de escala, del otro. Dos triángulos semejantes no tienen las mismas dimensiones en sus lados, pero si tienen todos sus ángulos iguales y las relaciones entre sus lados son las mismas, es decir si un lado es el doble de otro en uno de los triángulos esa relación se da también en el otro triángulo. Justamente por respetarse estas relaciones tenemos que en la figura 7 tenemos la igualdad:

$$\frac{x}{f} = \frac{r}{d}.$$

De esto deducimos que

$$x = \frac{r \times f}{d}.$$

Pero x representa la longitud medida en la regla y proyectada sobre el sensor y sabemos que esa longitud ocupa n pixels, de modo que la longitud de un pixel es:

$$s = \frac{x}{n} = \frac{r \times f}{n \times d}.$$

4. Determinación de un ángulo aparente en una fotografía

Conociendo ya el valor de s de nuestro CCD (o CMOS), podemos usarlo ahora para determinar el ángulo aparente θ entre 2 objetos, en cualquier fotografía tomada con la misma cámara, vamos a necesitar una calculadora científica, o la calculadora del Google o, para los viejos nostálgicos del pasado (como nosotros), una tabla de funciones trigonométricas, el ángulo θ (que se pronuncia teta y no tita como nos enseñaron nuestros “paquetes” profes del secundario) se determina por la fórmula:

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{f}\right) = \arctan\left(\frac{n \times s}{f}\right), \quad (1)$$

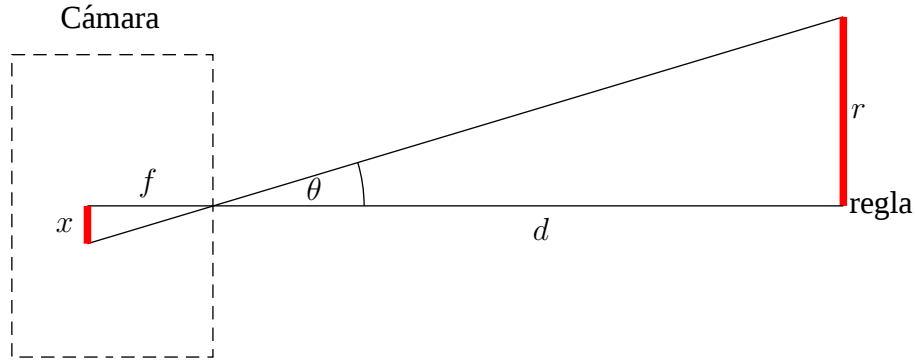


Figura 7: Experimento fotográfico

donde n nuevamente es la longitud en pixels medida con photoshop, por ejemplo, de aquello que queramos determinar su ángulo aparente s es la longitud del pixel que calculamos antes, f es la distancia focal utilizada y $\arctan$ es la inversa de la función tangente (normalmente en una calculadora esto se calcula introduciendo el valor y luego apretando shift (o inv) + tan).

Ahora bien, para los que no les gusten las funciones trigonométricas, podemos obviarlas haciendo una aproximación. Y diremos que

$$\theta = \left(\frac{n \times s}{f} \right) \times 206265. \quad (2)$$

Para que la fórmula funcione, n hay que medirlo en píxel, s y f en milímetros.

(para los que no aguantan su curiosidad digamos que $\arctan x$ y x tienen valores muy próximos para pequeños ángulos, y el factor 206265 es para convertir, ya que 1 radian = 206264,8seg).

Lo que resulta interesante es que la fórmula funciona bien aún que utilicemos la cámara acoplada a otro instrumento óptico, por ejemplo un telescopio, sólo hay que conocer la distancia focal resultante del acoplamiento.

Y aquí aparece otro dato que puede ser de interés! Como puede verse en [2], para una cámara montada afocalmente tenemos que

$$\text{Distancia focal} = \text{distancia focal cámara} \times \text{aumentos teles}$$

Veamos un ejemplo, determinar el ángulo aparente del diámetro de la luna en una foto tomada el 19/09/07 a las 1h56min.

La foto en cuestión se tomó con un telescopio de 900mm de distancia focal y con un ocular de 25mm, esto nos da:

$$\frac{900mm}{25mm} = 36X$$

En el explorador de archivos (ver figura 8) leemos la distancia focal exacta que tuvo la cámara durante la fotografía, esta resulta ser de 6.3mm. Así la distancia focal final del conjunto cámara + ocular + telescopio es:

$$f = 6,3mm \times 36 = 226,8mm.$$



Figura 8: Distancia focal

Por otro lado medimos la cantidad de pixels (ver figura 9) que representa el diámetro de la luna con el photoshop, dándonos como resultado 1092.47 pixels.

Recordando que el valor de s que calculamos para la Kodak era de 1,868 micrómetros Reemplazamos todos los datos en la fórmula 1 tenemos que el diámetro aparente de la luna el 19/09/07 a las 1h 56' era de:

$$\theta = \arctan \left(\frac{1092,47mm \times 1,868 \times 10^{-3}mm}{226,8mm} \right) = \text{¡¡¡tatan tatan!!!} = 0^{\circ}30'55''.$$

Si usamos la fórmula por aproximación, nos daría:

$$\theta = \left(\frac{1092,47mm \times 1,868 \times 10^{-3}mm}{226,8mm} \right) \times 206265 = 0^{\circ}30'55''.$$

Como podrán ver la fórmula por aproximación es bastante exacta cuando operamos con ángulos pequeños, para encontrar la diferencia deberíamos tomar en cuenta fracciones de segundo.

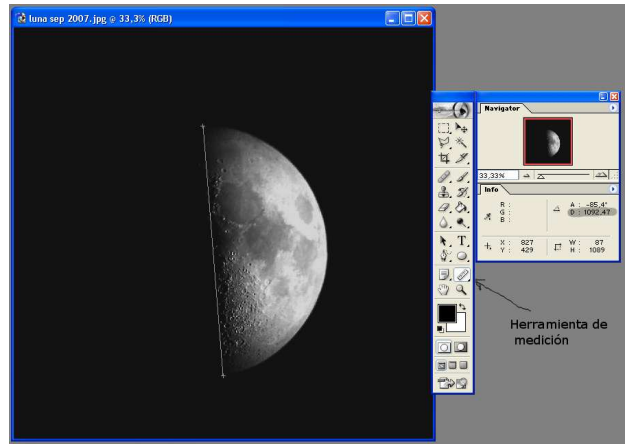


Figura 9: Diámetro en pixels de la luna

Pero lo más importante, ¿Cuál era el diámetro aparente de la luna esa noche? Consultado con el Virtual Moon Atlas ese día el diámetro aparente de la luna era de $30'09''$, es decir tenemos un error de $49''$, no está mal para la Luna, pero para la medición de un ángulo más chico, por ejemplo el paralaje de una estrella cercana, se necesitaría mejorar estos valores. Nos encantaría que se pudiera mejorar estos resultados, quizás tomándose el trabajo de medir la longitud horizontal y vertical del pixel se logre, o haciendo muchas mediciones del diámetro en pixels de la luna y promediándolos.

Referencias

- [1] Stephen W. Hughes: *Measuring the orbital period of the Moon using a digital camera*. Phys. Educ. **41** 144-150 (2006) doi:10.1088/0031-9120/41/2/004. <http://www.iop.org/EJ/abstract/0031-9120/41/2/004/>.
- [2] Michael A. Covington: *Astrophotography for the Amateur* (1999) Cambridge University Press.