

Buenos días.

Retomo este hilo porque creo que el concepto de diferencial es uno de los conceptos más importantes en el cálculo diferencial; y, es a través de éste, que se desarrolla la gran mayoría de las expresiones diferenciales (es decir, las ecuaciones diferenciales) que modelan matemáticamente los fenómenos físicos.

El punto en común en los modelos matemáticos (a los cuales hago referencia arriba) es el uso de expresiones diferenciales del tipo dy/dx ; dv/dt , etc. En general, estas expresiones son concebidas, por un lado, como un simple símbolo u operador "imposible de separar": (d/dx) , el cual se "aplica" sobre la expresión funcional en cuestión. Por ejemplo: $(d/dx)y(x) = (dy/dx)$. Se trata de una manera alternativa de expresar $f'(x)$. Lo importante es entender que en este caso (dy/dx) es un símbolo que carece de significado como cociente de dos términos.

Desde otro punto de vista, las anteriores expresiones resultan ser cocientes cuyos términos pueden ser "separados". Dichos términos se conocen como "diferenciales". La confusión y la falta de seguridad en su utilización radica en el diferente nivel de importancia que se le asigna a estos conceptos en Matemática y en Física. En Matemática, más específicamente, en Cálculo, el concepto de diferencial carece de significado propio, siendo solamente una expresión resultante del concepto de derivada. Cauchy definió al diferencial como una función obtenida a partir del concepto de derivada de la siguiente manera: $dy = f'(x)dx$. En otras palabras, en Matemática, a partir de Cauchy, las expresiones diferenciales pasaron a ser un aspecto secundario subordinado al concepto de derivada; siendo este concepto (el de derivada) definido como el límite de un cociente incremental cuando el denominador del mismo tiende a cero.

Por el contrario, en Física, el concepto de diferencial es el punto de partida para el análisis de cualquier situación física relativamente compleja. Comúnmente, los profesores en su argumentación suelen asociar erróneamente el concepto de diferencial con "incrementos infinitesimales" o "infinitamente pequeños" de las correspondientes variables.

Para entender el concepto de diferencial y el porqué de su utilización, primero es necesario comprender en qué casos resulta imprescindible su uso y en cuáles no. Es obligatorio el manejo de diferenciales en aquellos casos en los que se sabe que la relación funcional $y = f(x)$, que vincula a las magnitudes principales del fenómeno en estudio, no es de tipo lineal, es decir; cuando sabemos que: $\Delta y/\Delta x \neq cte$. Esta expresión, en términos geométricos, sugiere que la gráfica que satisface la relación funcional $y = f(x)$ no es una recta, sino, una curva.

Si dicha relación fuese lineal, el comportamiento del fenómeno físico podría ser fácilmente explicado en términos matemáticos mediante la ecuación de una recta: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ y desde el punto de vista matemático el problema estaría resuelto. Conociendo un valor inicial, por ejemplo: $y(x_0) = y_0$, solo faltaría encontrar experimentalmente el valor adecuado de m

Sin embargo, en los casos más generales en los que, como se dijo, la relación entre Δy y Δx no es lineal, el valor de m no será constante. Por el contrario, cambiará continuamente en función del valor de x ; es decir; m será función de x , lo que se puede expresar como: $m = m(x)$

Lamentablemente, la mayoría de los fenómenos físicos estudiados caen dentro del grupo de "casos generales" en los que las relaciones entre las variables que describen dichos fenómenos no son lineales. El trabajo de los físicos es intentar encontrar estas relaciones y expresarlas en forma matemática a través de funciones del tipo: $y = f(x)$ para que puedan ser contrastables con datos experimentales.

En este contexto, lo que se intenta es lo siguiente. Conociendo un valor inicial, por ejemplo, para x_0 ; $y(x_0) = y_0$ se intenta determinar cuál es el incremento real de y , es decir, el Δy debido a un incremento de x desde x_0 a $x_0 + \Delta x$, reconociendo desde la partida que esa relación NO es lineal.

Es aquí donde hace su aparición la diferencial, la cual SÍ posee un significado físico claro y, por cierto, muy alejado a "variaciones infinitesimales" o "variaciones infinitamente pequeñas" de la variable en cuestión. La diferencial no necesariamente tiene que representar una variación infinitamente pequeña de una variable; puede también representar variaciones "grandes" de aquella.

La diferencial debe ser entendida como una aproximación lineal dy al incremento real Δy de la función incógnita $y = f(x)$. Y no solo eso, sino que, además, es la ÚNICA aproximación lineal al incremento de la función $y = f(x)$ que por integración permite obtener dicho Δy . La única diferencial que satisface lo anterior es aquella que cumple: $dy = f'(x)dx$

Resumiendo

- El concepto de Diferencial no tiene que ser asociado a "incrementos infinitamente pequeños".
- La diferencial, en el contexto de los modelos matemáticos que describen fenómenos físicos en los que las variables intervinientes no presentan una relación de tipo lineal (recta), debe ser entendida como una aproximación lineal $dy = f'(x)dx$ al incremento de una función $y = f(x)$. Función que en general se desconoce y se intenta determinar mediante dichos modelos.
- La diferencial $dy = f'(x)dx$ además de ser una aproximación lineal al incremento, es la única aproximación que permite obtener la función incógnita $y = f(x)$ mediante el proceso de integración.
- La diferencial en física reviste un carácter hipotético. Se propone una expresión diferencial en función de las características conocidas del fenómeno físico en estudio. Se resuelve esa expresión diferencial (ecuación diferencial) mediante integración y se obtiene la función incógnita buscada $y = f(x)$. Luego se contrastan los datos experimentales con la ecuación obtenida anteriormente y se evalúa su validez.
- De los dos puntos previos se deduce que pueden proponerse inicialmente infinitas expresiones "candidatas" a ser la diferencial. Estas expresiones propuestas surgen, como se dijo anteriormente, del conocimiento de ciertos aspectos del fenómeno en estudio. Sin embargo, solo una de ellas será la adecuada, lo cual será verificado mediante el procedimiento citado en el punto previo.
- La diferencial es función de x y Δx
- Toda diferencial propuesta debe ser del tipo $dy = axdx$; $dy = x^n dx$; $dy = a/b \sqrt[n]{x} dx$ no pudiendo ser en ningún caso del tipo $dy = axdx^n$ puesto que debe ser siempre lineal respecto al dx

