

**CURVAS DE VELOCIDAD DE ROTACIÓN  
DE LAS GALAXIAS POR ENERGÍA  
EXPLICACIÓN HIPOTÉTICA  
(Msc. Ing. Yul Goncalves)  
email: yulaldebran9@hotmail.com**

La presente idea es una explicación que peca de sencilla, para demostrar a través de física ordinaria, las curvas de velocidad de rotación de las galaxias, para ello uso los conceptos de energía y velocidad de escape, además podemos agregar densidad de materia oscura y variar cantidades que modifiquen las curvas. De antemano les asomo, que los cálculos son generales, sin pretender asegurar nada, la intención es el deseo de aportar ideas que contribuyan a develar los fenómenos físicos que nos atraen.

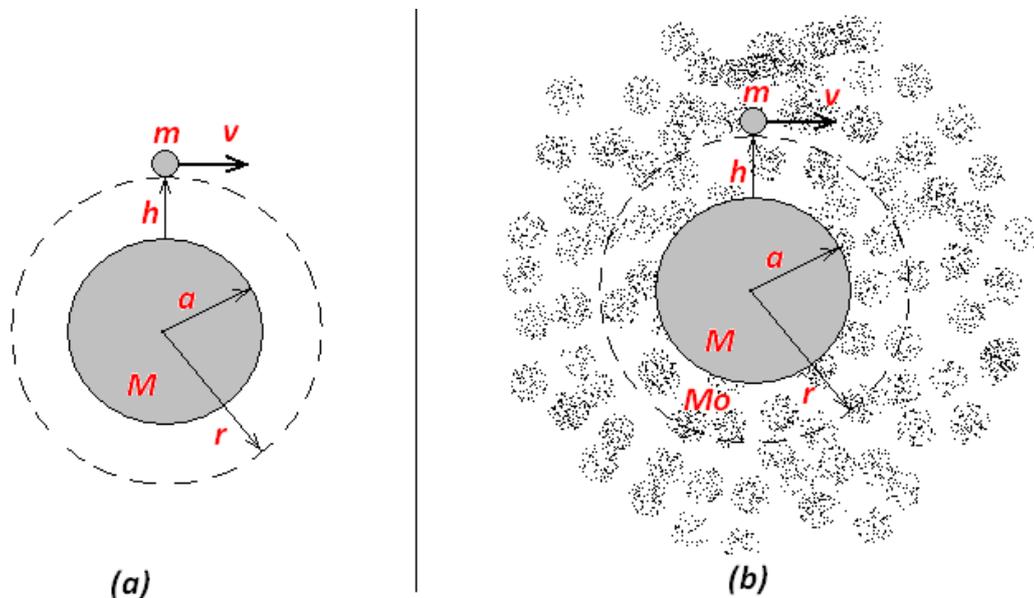


Fig.1. En la (a), tenemos una estrella de masa  $m$ , que rota a una velocidad  $v$  y que dista  $r$  desde el centro de la galaxia de masa  $M$  y núcleo de radio  $a$ . En (b), es semejante pero con la hipotética materia oscura  $M_o$ , alrededor del núcleo de la galaxia.

**Curva de velocidad de rotación sin tomar en cuenta la materia oscura**

En esta parte, notaremos como sin la materia oscura, la curva de velocidad de rotación se asemeja mucho a las obtenidas en las mediciones observadas.

**Velocidad de rotación para  $r \leq a$**

Tomando en cuenta la figura 1(a), supongamos que inmediatamente alrededor ( $r = a$ ) del núcleo de la galaxia se genera un campo de velocidad tal, que la estrella alcanzase una rapidez como mínima suficiente o igual a la de escape, es decir:

Por balance de energía cinética más potencial igual a la mecánica, se tiene:

$$E_c + E_p = E_m \quad \text{ec.1}$$

Luego

$$\frac{mV^2}{2} + mgh = E_m \quad \text{ec.2}$$

Donde

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad \text{ec.3}$$

Por lo tanto inmediatamente en el borde del núcleo

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{mGM \cdot 0}{a^2} = \frac{GM \cdot m \cdot r}{r^2} \quad ; \quad \text{si } r = a, h = 0 \quad \text{ec.4}$$

Con lo que la velocidad de escape sería

$$V(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \text{en } r = a \Rightarrow V_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{a}} \quad \text{ec.5}$$

Ahora, se sabe que dentro del núcleo, la densidad  $\rho$  es prácticamente constante por lo tanto, la masa  $M$  en función del radio sería:

$$M(r) = \frac{4 \pi \rho}{3} r^3 \quad \text{ec.6}$$

La velocidad de rotación desde  $r=0$  hasta  $r=a$ , puede modelarse igualando la fuerza centrífuga con la fuerza gravitatoria:

$$m \frac{V^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{ec.7}$$

Sustituyendo la ec.6 en la ec.7, y despejando  $V$ , se obtiene:

$$V(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{4 \pi \rho G}{3} r^2}$$

$$V(r) = \left( \sqrt{\frac{4 \pi \rho G}{3}} \right) \cdot r = k \cdot r \quad \text{ec.8}$$

Es de resaltar, que esta velocidad es proporcional al radio  $r$ , y que si la estrella logra escapar debe alcanzar la velocidad de escape  $V_{esc}$  (ec.5), por lo tanto podemos deducir que, desde  $r=0$ , hasta el borde del núcleo  $r=a$ , se tendrá la siguiente ecuación de velocidad posible:

$$V(r) = \left( \frac{V_{esc}}{a} \right) \cdot r \quad \text{ec.9}$$

### **Velocidad de rotación para $r > a$**

Volviendo con la posibilidad de que la estrella hipotética, alcance la velocidad de escape, veamos que ocurre con ella a medida que se aleja del núcleo, para ello utilizaremos nuevamente la ecuación de balance de energía, veamos:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{mGM \cdot h}{r^2} = \frac{mV_{esc}^2}{2} \quad \text{ec.10}$$

Como  $r=h+a$ , entonces al despejar la velocidad obtenemos:

$$V = \sqrt{V_{esc}^2 - \frac{2GM \cdot h}{(a+h)^2}} \quad \text{ec.11}$$

O la velocidad en función del radio  $r$  :

$$V(r) = \sqrt{V_{esc}^2 - \frac{2GM \cdot (r-a)}{r^2}} \quad \text{e.12}$$

En resumen, sin tomar en cuenta la materia oscura, se tiene la siguiente distribución o patrón de velocidad de rotación en función de la distancia  $r$ , para una galaxia de núcleo con radio  $r=a$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} V(r) = \left( \frac{V_{esc}}{a} \right) \cdot r & \text{para } r \leq a \\ V(r) = \sqrt{V_{esc}^2 - \frac{2GM \cdot (r-a)}{r^2}} & \text{para } r > a \end{array} \right.$$

Usando el siguiente programa en MATLAB, podemos ver la gráfica de  $V(r)$

```
%Programa en Matlab para la velocidad de rotación  
%de las galaxias.
```

```
v=[];  
h=[];  
r=[];  
GM=15625; % km^2/s^2*kpc  
a=0.5; % kpc
```

```
vesc=sqrt(2*GM/a); %km/s
```

```
i=1;
```

```
%Para r<=a
```

```
for hh=0:a/50:a  
    r(i)=hh;  
    v(i)=vesc*r(i)/a;  
    i=i+1;  
end
```

```
%Para r>a
```

```

for hh=0:a/10: 26*a

    r(i)=a+hh;
    v(i)=sqrt(vesc^2-2*GM*(r(i)-a)/r(i)^2);
    i=i+1;
end

plot(r,v)

```

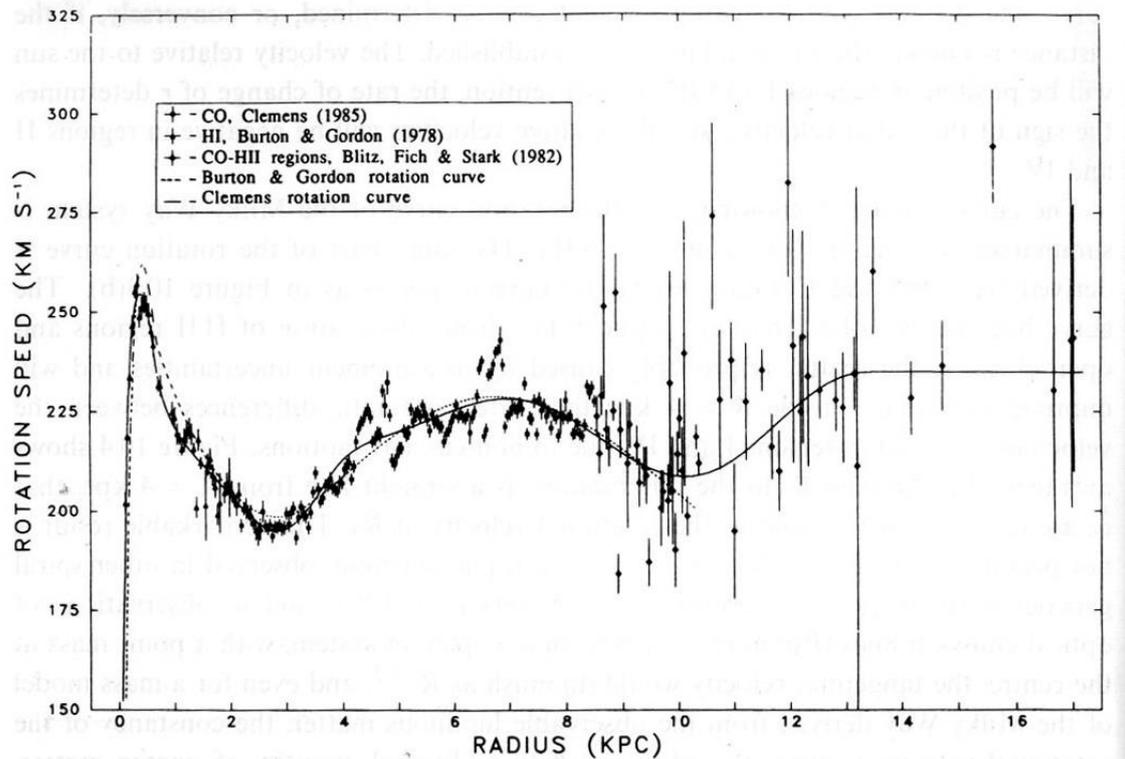
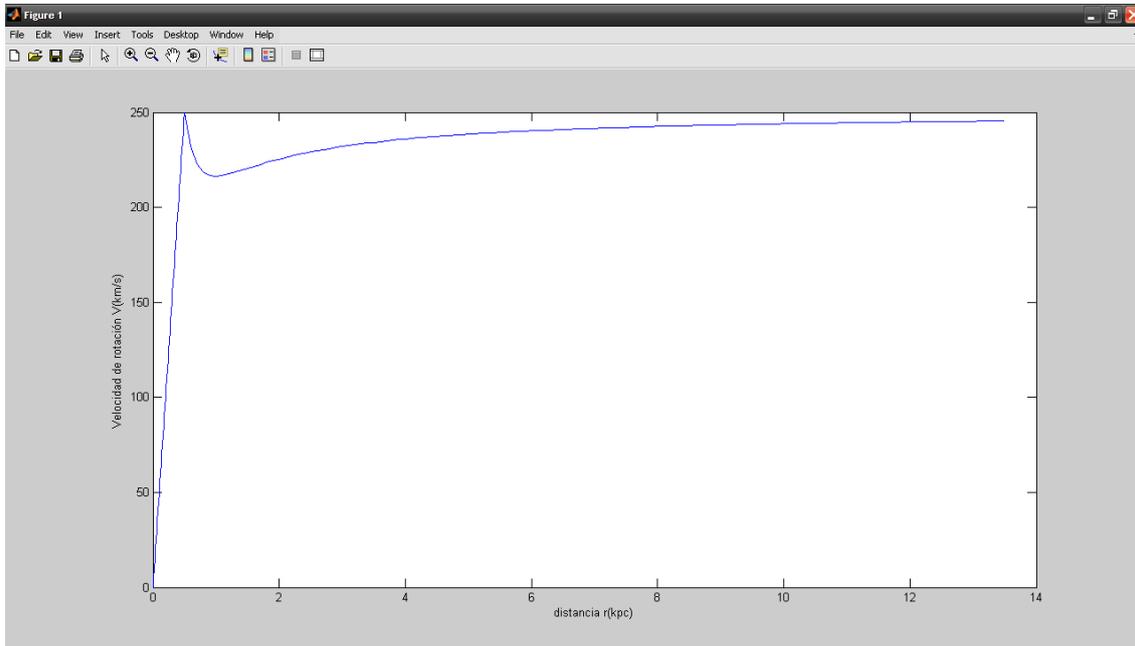


Fig.2, Arriba la curva de rotación del modelo planteado usando MATLAB y abajo, una curva típica de rotación obtenida de nuestra propia galaxia, la vía láctea, ambas algo semejantes.

A continuación otras imágenes de curvas de rotación en diferentes galaxias:

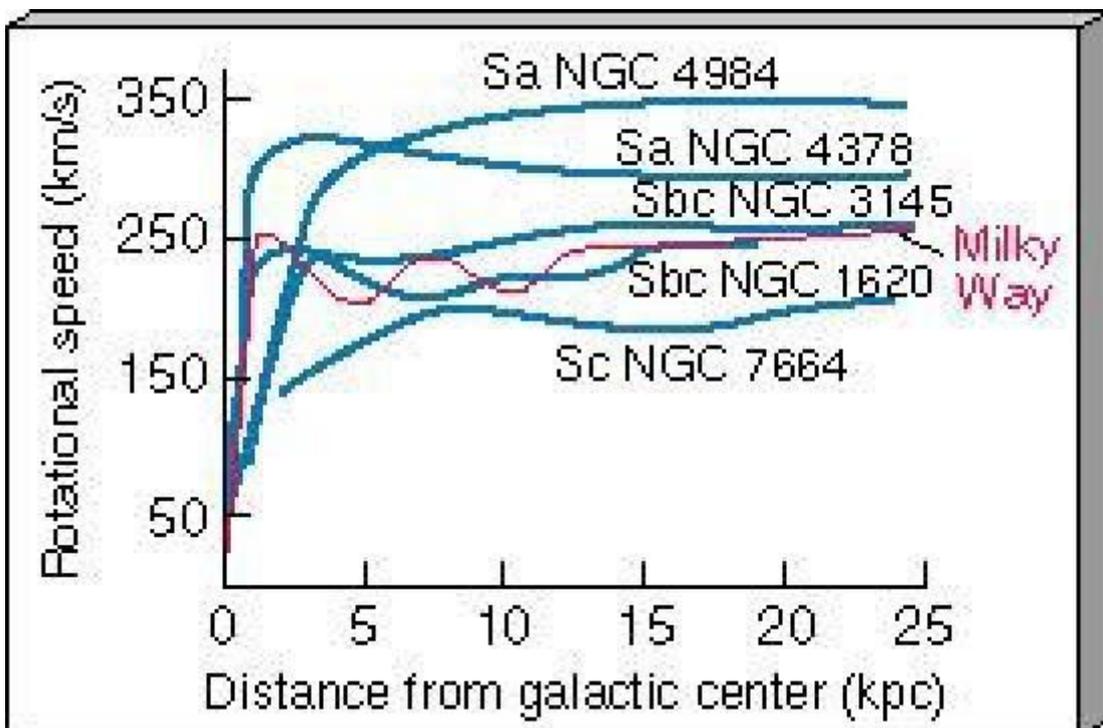
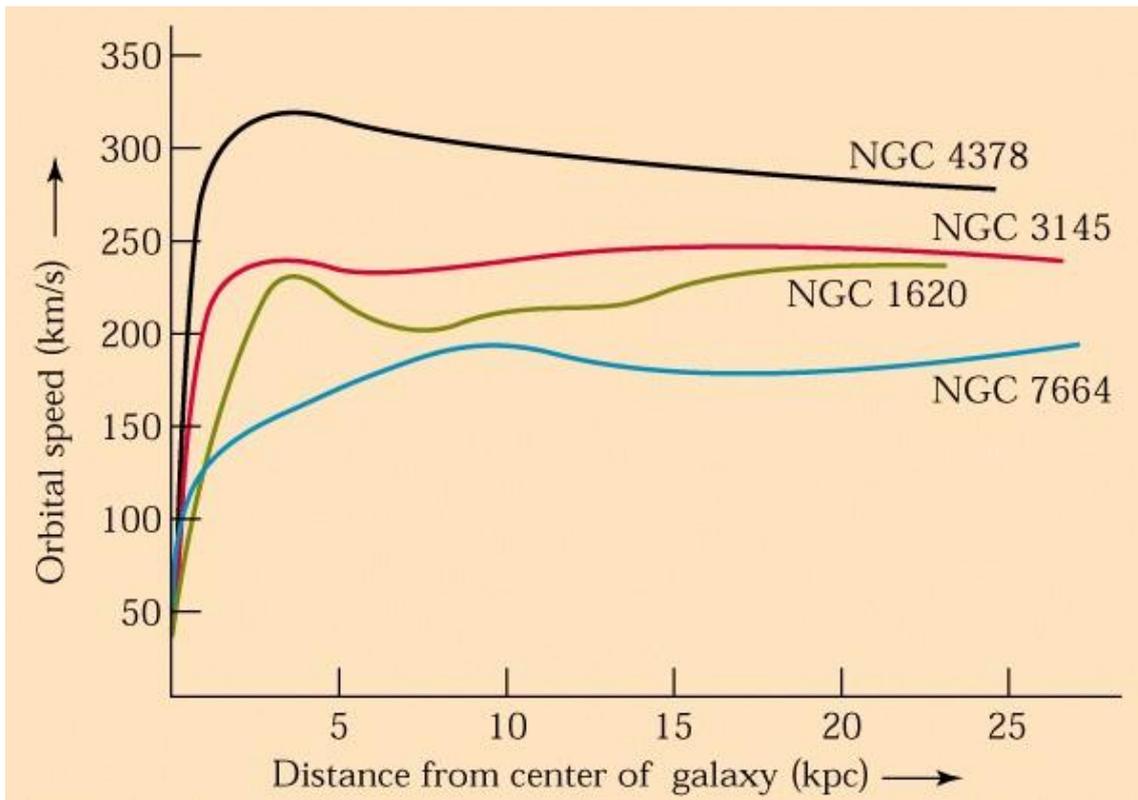


Fig.3, Distintas curvas de rotación en varias galaxias.

Notamos que si cambiamos, arbitrariamente, el signo negativo por uno positivo, dentro de la cantidad subradical de la ecuación e.12, para que quede así:

$$V(r) = \left( \frac{V_{esc}}{a} \right) \cdot r \quad \text{para} \quad r \leq a$$

$$V(r) = \sqrt{V_{esc}^2 + \frac{2GM \cdot (r - a)}{r^2}} \quad \text{para} \quad r > a$$

Al usar el mismo programa de MATLAB anterior y haciendo este cambio, se obtiene la siguiente curva, parecida a la galaxia Sa NGC 4378, de la fig.3:

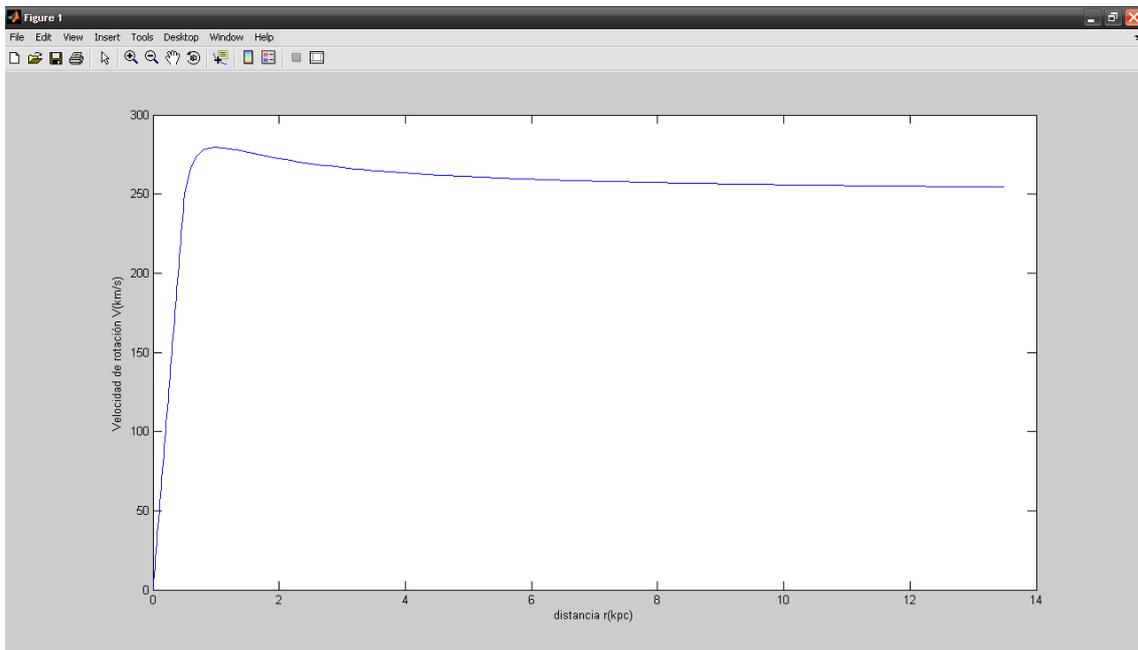


Fig.4, Curva obtenida por el modelo planteado muy parecida a la galaxia Sa NGC 4378.

### Curva de velocidad de rotación tomando en cuenta la materia oscura

Al parecer no se necesita “materia oscura” para justificar el hecho de que la velocidad de rotación de las estrellas más allá del radio de su núcleo permanezcan constante. Sin embargo, veamos cómo se comporta la velocidad de rotación al tomar en cuenta una densidad de materia, que se extienda más allá de  $r=a$ .

*%Programa en Matlab para la velocidad de rotación  
%de las galaxias, tomando en cuenta materia oscura.*

```
v=[];
r=[];
G=6.67e-11;
GM=15625; % km^2/s^2*kpc
M=GM/G; %Masa de la galaxia
a=0.5; % radio del núcleo en kpc
```

```

ho=50*a; %Máximo de distancia a estudiar.
vesc=sqrt(2*GM/a); %km/s

%Densidad d de materia oscura, la supondremos constante
d=(21/4*M)/(4*pi/3*(ho-a)^3); %Relación entre materia oscura y
%visible 21%/4%

i=1;
for hh=0:a/50:a
    r(i)=hh;
    v(i)=vesc*r(i)/a;
    i=i+1;
end
for hh=0:a/5: 50*a
    r(i)=a+hh;
    Mt=M+d*(4*pi/3)*(r(i)^3-a^3); %Masa total tomando en cuenta la
    %materia oscura
    v(i)=sqrt(vesc^2-2*G*Mt*(r(i)-a)/(r(i))^2);
    i=i+1;
end

plot(r,v)

```

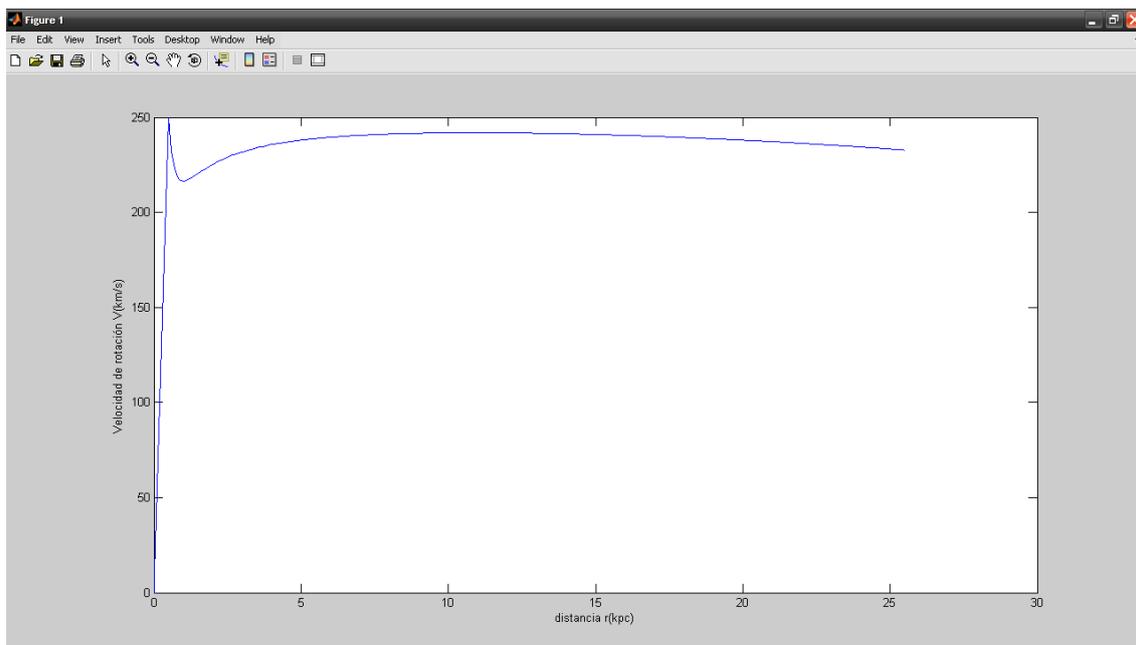


Fig.5, Curva de rotación del modelo planteado usando MATLAB tomando en cuenta materia oscura, vemos que se redondea y decae suavemente semejante a la galaxia Sbc NGC 3145.

Si nuevamente cambiamos, arbitrariamente, el signo negativo por uno positivo, dentro de la cantidad subradical de la ecuación e.12, en el programa anterior, obtenemos la siguiente curva, que tiende a redondearse y a subir, semejante a la galaxia Sbc NGC1620, de la fig.3:

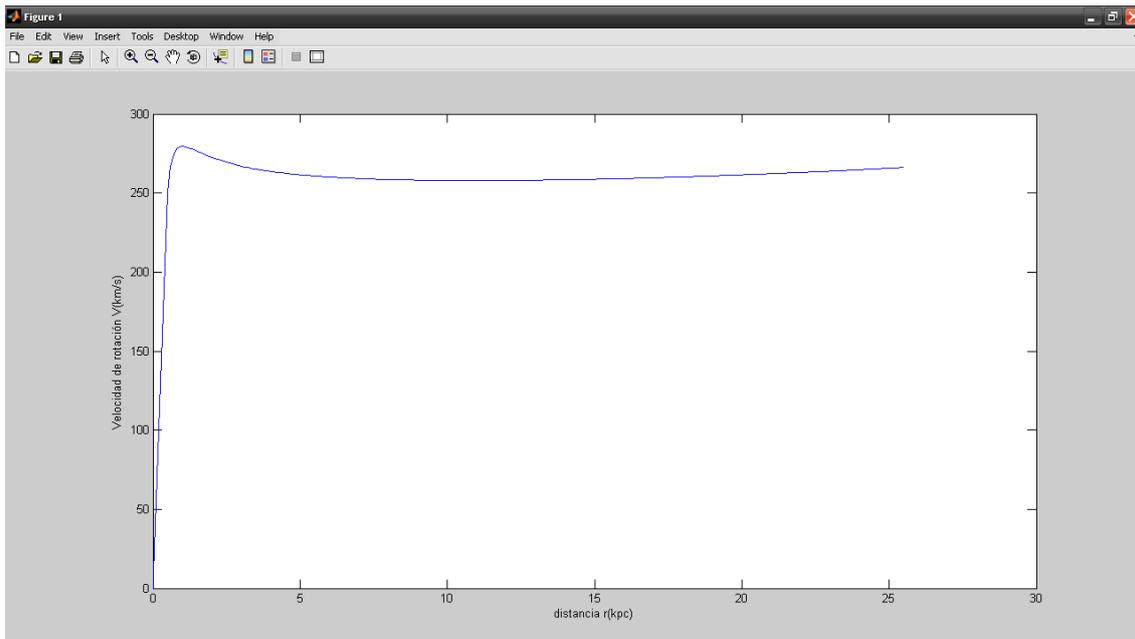


Fig.6, Curva de rotación del modelo planteado usando MATLAB tomando en cuenta materia oscura, con un cambio arbitrario de signo, vemos que se redondea y sube suavemente semejante a la galaxia Sbc NGC 1620.

### Curvas de velocidad de rotación comparativas

Ahora en un mismo programa podemos mostrar las distintas variantes y agregar una más, la cual es v4, cuya dinámica presenta un amortiguamiento típico, lo interesante es que así se asemeja a la curva de la Vía Láctea, tal vez producto de ondas gravitatorias.

*%Programa en Matlab para la velocidad de rotación  
%de las galaxias, tomando materia oscura o no y otras  
%variantes.*

```
v=[];
v1=[];
v2=[];
v3=[];
v4=[];
r=[];
G=6.67e-11;
GM=15625; % km^2/s^2*kpc
M=GM/G; %Masa de la galaxia
a=0.5; % radio del núcleo en kpc

ho=50*a; %Maximo de distancia a estudiar.
vesc=sqrt(2*GM/a); %km/s

%Densidad d de materia oscura, la supondremos constante
d=(21/4*M)/(4*pi/3*(ho-a)^3); %Relación entre materia oscura
%y visible 21%/4%

Mo=21/4*M;
i=1;
%Para r<=a
for hh=0:a/50:a
    r(i)=hh;
    v(i)=vesc*r(i)/a;
    v1(i)=vesc*r(i)/a;
```

```

v2(i)=vesc*r(i)/a;
v3(i)=vesc*r(i)/a;
v4(i)=vesc*r(i)/a;
i=i+1;
end

%Para r>a, con diferentes variantes
for hh=0:a/5: 50*a
    r(i)=a+hh;
    Mt=M+d*(4*pi/3)*(r(i)^3-a^3); %Masa total tomando en cuenta
    %la materia oscura
    v(i)=sqrt(vesc^2-2*GM*(r(i)-a)/r(i)^2); %sin materia oscura
    v1(i)=sqrt(vesc^2-2*G*Mt*(r(i)-a)/r(i)^2);%con materia oscura

    %Cambio de signo arbitrario
    v2(i)=sqrt(vesc^2+2*GM*(r(i)-a)/r(i)^2);
    v3(i)=sqrt(vesc^2+2*G*Mt*(r(i)-a)/r(i)^2);
    %Cambio de signo arbitrario y amortiguamiento, producto de ondas
    %gravitatorias.
    v4(i)=sqrt(vesc^2+2*exp(-hh/(4*a))*sin(2*pi/(4*a)*r(i))*GM*(r(i)-a)/r(i)^2);
    i=i+1;
end

plot(r,v,r,v1,r,v2,r,v3,r,v4)
title('Velocidad de Rotación de Galaxias, diferentes patrones')
xlabel('distancia r(kpc)');
ylabel('Velocidad de rotación V(km/s)');

```

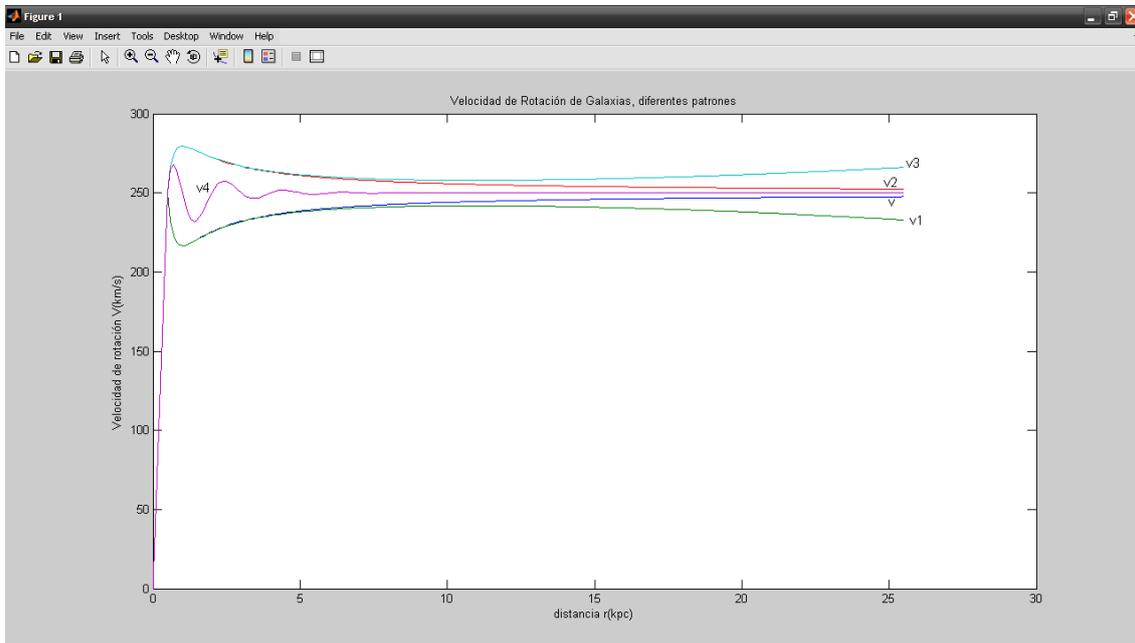


Fig.7, Curva de rotación del modelo planteado usando MATLAB, distintas variantes.

## Conclusión

- Independientemente de la existencia de la materia oscura, la velocidad de rotación de las galaxias tiende a una velocidad constante, así lo demuestra la ecuación ec.12, deducida a partir de los conceptos de energía cinética, potencial y mecánica.

- La existencia de materia oscura, influye en el modelo haciendo que se produzcan curvas variadas. Por lo tanto no se descarta la materia oscura, lejos de eso, se justifica.
- Las diferentes curvas no pueden provenir de una misma ecuación ya que la proporción de materia oscura, formas de la galaxia y otros factores dinámicos suman e influyen su comportamiento, sin embargo, las galaxias tiende a desarrollar un campo de velocidad constante de rotación lejos de su núcleo, cualquier astro o materia que entre en esta zona adoptará esta velocidad, no necesariamente debe escapar de su núcleo, puede haber estado allí que es lo más probable y común.
- Los cambios de signo “arbitrarios”, en el modelo planteado, son de carácter matemático, lo “extraño” es su similitud con las curvas reales. No tengo respuesta, por los momentos para ello, tal vez se trate de las variantes que introduce la misma dinámica de la galaxia, amortiguamientos, junto a la materia oscura.